BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

**Р.А.САРДАРОВА, Я.А.ШАРИФОВ**
***Азербайджанский Государственной Экономический Университет***
***Бакинский Государственный Университет***

*В работе рассмотрена задача оптимального управления с неразделенными граничными условиями, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями. Найдена формула градиента целевого функционала в явном виде. Доказана теорема существования оптимального управления.*

1.**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу минимизации: найти

$$J_* = \inf_{u\in U} J(u) \tag{1}$$

для функционала

$$J(u) = \Phi(x(t_0), x(T)) + \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt \tag{2}$$

на множестве

$$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0, T], \tag{3}$$

где вектор-функция $x = (x_1, ..., x_n)$ является абсолютно – непрерывным решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \text{ при п.в. } t \in [t_0, T], \tag{4}$$

с граничными условиями

$$Ax(t_0) + Bx(T) = C, \tag{5}$$

здесь $u = (u_1, u_2, ..., u_r)$ - управляющая функция; $U$ - заданное множество из $L_2^r[t_0, T]$; моменты времени $t_0, T$ фиксированы; $A$ и $B$ - заданные постоянные матрицы $n \times n$ порядка, причем $\det(A + B) \neq 0$; $C - n$ - мерный вектор столбец.

Ниже будут сформулированы достаточные условия дифференцируемости функционалы (2) на множестве $U$ и получена формула для ее градиента, а также доказана теорема существования оптимального управления.

Пусть данные задачи удовлетворяют следующим предположениям: вектор функция

$$f \equiv (f_1,\ldots,f_n): [t_0,T]\times R^n \times R^r \to R^n,\ F:[t_0,T]\times R^n \times R^r \to R^1$$

вместе с первыми производными $\nabla_x f \equiv (\partial f_i / \partial x_j)$, $\nabla_u f \equiv (\partial f_i / \partial u_k)$, $\nabla_x F \equiv (\partial F / \partial x_j)$, $\nabla_u F \equiv (\partial F / \partial u_k)$ $(i, j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,r})$ - измеримы по $(t,x,u)$, непрерывны по $(x,u)$ при п.в. $t \in [t_0,T]$, функция $\Phi: R^n \times R^n \to R^1$ и функции $\nabla_x \Phi \equiv (\partial \Phi / \partial x_i)$, $\nabla_y \Phi \equiv (\partial \Phi / \partial y_i)$ $(i = \overline{1,n})$ - непрерывны.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$F(t,x(t),u(t)) \in L_1[t_0,T], \quad f(t,x(t),u(t)) \in L_1[t_0,T],$$
$$\nabla_x F(t,x(t),u(t)),\quad \nabla_u F(t,x(t),u(t)),\quad \nabla_x f(t,x(t),u(t)),$$
$$\nabla_u f(t,x(t),u(t)) \in L_2[t_0,T]$$

при любом фиксированном $(x,u) \in C^n[t_0,T]\times U$ .

2. **Основные условия и вспомогательные факты.** Определим обобщенные $E$ – функции Вейерштрасса:

$$E_f : [t_0,T]\times R^n \times R^n \times R^r \times R^r \to R^n,$$
$$E_F : [t_0,T]\times R^n \times R^n \times R^r \times R^r \to R^1$$

и

$$E_\Phi : [t_0,T]\times R^n \times R^n \to R^1$$

по формулам:

$$E_f(t,x+\bar{x},x,u+\bar{u},u) \equiv f(t,x+\bar{x},u+\bar{u}) - f(t,x,u) - \nabla_x f(t,x,u)\bar{x} - \nabla_u f(t,x,u)\bar{u},$$
$$E_F(t,x+\bar{x},x,u+\bar{u},u) \equiv F(t,x+\bar{x},u+\bar{u}) - F(t,x,u) - \langle \nabla_x F(t,x,u),\bar{x}\rangle - \langle \nabla_u F(t,x,u),\bar{u}\rangle,$$
$$E_\Phi(t,x+\bar{x},x,y+\bar{y},y) \equiv \Phi(x+\bar{x},y+\bar{y}) - \Phi(x,y) - \langle \nabla_x \Phi(x,y),\bar{x}\rangle - \langle \nabla_y \Phi(x,y),\bar{y}\rangle.$$

Введем следующие условия, которые в дальнейшем будут фигурировать в формулировках доказываемых утверждений:

1) $\|f(t,0,u(t))\|_{L_1} \le M_0, \|\nabla_x f(t,x(t),u(t))\|_{L_2} \le M_1$
$\forall (x(t),u(t)) \in S_\rho \times U,$

где

$$RM_1 < 1,$$
$$R = \min\{\ \|(A+B)^{-1}A\| + 1, \|(A+B)^{-1}B\| + 1,$$
$$\|(A+B)^{-1}A\| + \|(A+B)^{-1}B\|\ \}\cdot \sqrt{T-t_0};$$

$$S_\rho = \left\{x(t) \in C^n[t_0, T] : \|x(t)\|_{C^n} \le \rho\right\},$$
$$\rho \ge \left(\left\|(A+B)^{-1}C\right\| + RM_0/\sqrt{T-t_0}\right)/(1-RM_1),$$
$\rho$ – некоторое число;

2) $\| \nabla_u f(t, x(t), u(t)) \|_{L_2} \le M_2 \quad \forall (x(t), u(t)) \in S_\rho \times U;$

3) $\| \nabla_x F(t, x(t), u(t)) \|_{L_2} \le K_1 \ \forall (x(t), u(t)) \in S_\rho \times U;$

$$\|\nabla_x \Phi(x, y)\| \le N_1, \ \|\nabla_y \Phi(x, y)\| \le N_2,$$
$$x, y \in S_\rho^* = \left\{x \in R^n : \|x\| \le \rho\right\},$$

4) $\left\|E_f(t, x(t) + \bar{x}(t), x(t), u(t) + \bar{u}(t), u(t))\right\|_{L_1^n} \le M_3 \|\bar{x}\|_{C^n}^2 + M_4 \|\bar{u}\|_{L_2^r}^2,$

$$\left\|E_F(t, x(t) + \bar{x}(t), x(t), u(t) + \bar{u}(t), u(t))\right\|_{L_1} \le K_2 \|\bar{x}\|_{C^n}^2 + K_3 \|\bar{u}\|_{L_2^r}^2,$$
$$\forall (x(t) + \bar{x}(t), u(t) + \bar{u}(t), (x(t), u(t))) \in S_\rho \times U,$$
$$\left\|E_\Phi(x + \bar{x}, x, y + \bar{y}, y)\right\| \le N_3 \|\bar{x}\|^2 + N_4 \|\bar{y}\|^2, \ x + \bar{x}, x, y + \bar{y}, y \in S_\rho^*,$$

5) $E_F(t, x(t) + \bar{x}(t), x(t), u(t) + \bar{u}(t), u(t)) \ge K_5 \|\bar{u}\|_{L_2^r}^2 - K_4 \|\bar{x}\|_{C^n}^2$

здесь $N_i, K_j, M_k$ – постоянные.

Используя подход [1,2], можно показать, что абсолютно-непрерывная на $[t_0, T]$ вектор-функция $x(t)$ является решением краевой задачи (4), (5) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = (A+B)^{-1}C - (A+B)^{-1}B\int_{t_0}^{T} f(t, x(t), u(t))dt +$$
$$+\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau \quad \forall \in [t_0, T], \tag{6}$$

соответствующему управлению $u(t)$.

С помощью принципа сжимающих отображений [3] доказана

**Теорема 1.** Пусть выполнены вышеуказанные предположения и условия 1). Тогда задача (4), (5) при каждом $u \in U$ имеет единственное решение из $S_\rho$.

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия 1), 2) и $(x(t), u(t)), (x(t) + \bar{x}(t), u(t) + \bar{u}(t)) \in S_\rho \times U$ – пара решений задачи (4), (5). Тогда имеет место

$$\|\bar{x}\|_{C^n} \le R_1 \cdot \|\bar{u}\|_{L_2^r}, \tag{7}$$

где

$$R_1 = RM_2 / (1 - RM_1)\sqrt{T - t_0}.$$

**Доказательство.** Пусть

$$(x(t), u(t)) \text{ и } (x(t) + \bar{x}(t), u(t) + \bar{u}(t)) \in S_p \times U$$

- два решения краевой задачи (4), (5). Тогда

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(t, x(t) + \bar{x}(t), u(t) + \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)), \text{ при п.в. } t \in [t_0, T] \quad (8)$$

$$A\bar{x}(t_0) + B\bar{x}(T) = 0, \quad (9)$$

т.е. $\bar{x}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\bar{x}(t) = -(A+B)^{-1} B \int_{t_0}^{T} [f(t, x(t) + \bar{x}(t), u(t) + \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t))] dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau) + \bar{x}(\tau), u(\tau) + \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u(\tau))] d\tau, \quad t \in [t_0, T]. \quad (10)$$

Используя формулу конечных приращений, с учетом условий 1), 2), из (10) имеем:

$$\|\bar{x}\|_{C^n} \le R \cdot M_1 \|\bar{x}\|_{C^n} + RM_2 \|\bar{u}\|_{L_2^r} / \sqrt{T - t_0}.$$

Отсюда получаем доказательство леммы.

Введем следующее сопряженное уравнение, соответствующее управлению $u \in U$:

$$\psi(t) = -\nabla_x \Phi'(x(t_0), x(T))(A+B)^{-1} B + \nabla_y \Phi'(x(t_0), x(T))(A+B)^{-1} A -$$

$$- \int_{t_0}^{T} \nabla_x H'(t, x(t), u(t), \psi(t)) dt (A+B)^{-1} A +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \nabla_x H(\tau, x(\tau), u(\tau), \psi(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0, T], \quad (11)$$

где

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = F(t, x(t), u(t)) + < \psi(t), f(t, x(t), u(t)) >,$$

$$\nabla_x H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \nabla_x F(t, x(t), u(t)) + \psi'(t) \cdot \nabla_x f(t, x(t), u(t)),$$

$$\psi(t) = \psi(t, u) = (\psi_1(t, u), \ldots, \psi_n(t, u)).$$

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия 1)-3). Тогда система интегральных уравнений (11) имеет единственное абсолютно непрерывное решение и справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{C^n} \le \left( \left\| (A+B)^{-1} B \right\| N_1 + \left( \left\| (A+B)^{-1} A \right\| N_2 + RK_1 \right) \right) / (1 - RM_1) = S_1. \quad (12)$$

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству леммы 1.

**3. Основные результаты.**

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 1)-4). Тогда в задаче оптимального управления (1)-(5) функционал (2) дифференцируем и его градиент имеет вид:

$$\nabla_u J(u) = \nabla_u H(t, x(t), u(t), \psi(t)) \in L_2^r[t_0, T], \ t \in [t_0, T], \tag{13}$$

где

$$\nabla_u H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \nabla_u F(t, x(t), u(t)) + \psi'(t) \nabla_u f(t, x(t), u(t)).$$

**Доказательство**. Пусть $u = u(t), u + \bar{u} = u(t) + \bar{u}(t) \in L_2^r[t_0, T]$, а $x(t, u), \ x(t; u + \bar{u}), \ t_0 \le t \le T$, - соответствующие этим управлениям решения задачи (4), (5). Тогда для приращения функционала верно:

$$J(u + \bar{u}) - J(u) = E_\Phi(x(t_0) + \bar{x}(t_0), x(t_0), x(T) + \bar{x}(T), x(T)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} E_F(t, x(t) + \bar{x}(t), x(t), u(t) + \bar{u}(t), u(t)) dt + < \nabla_x \Phi(x(t_0), x(T)), \bar{x}(t_0) > +$$

$$+ < \nabla_y \Phi(x(t_0), x(T)), \bar{x}(t_0) > +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} [< \nabla_x F(t, x(t), u(t)), \bar{x}(t) > + < \nabla_u F(t, x(t), u(t)), \bar{u}(t) >] dt \tag{14}$$

Теперь умножая равенство (8) скалярно на некоторую функцию $\psi(t), \ t \in [t_0, T]$, проинтегрируя по $t$ на $[t_0, T]$ и слагая почленно с равенством (14), для приращения функционала $J(u)$ получаем:

$$J(u + \bar{u}) - J(u) = \int_{t_0}^{T} < \psi(t) + \nabla_x \Phi'(x(t_0), x(T))(A + B)^{-1} B -$$

$$- \nabla_y \Phi'(x(t_0), x(T))(A + B)^{-1} A > dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \nabla_x H'(t, x(t), u(t), \psi(t)) dt (A + B)^{-1} A - \int_{t_0}^{T} \nabla_x H(t, x(\tau), u(\tau), \psi(\tau)) d\tau + \eta, \tag{15}$$

где

$$\eta = \int_{t_0}^{T} E_F(t, x(t) + \bar{x}(t), x(t), u(t) + \bar{u}(t), u(t)) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} < \psi(t), E_f(t, x(t) + \bar{x}(t), x(t), u(t) + \bar{u}(t), u(t)) > dt +$$

$$+ E_\Phi(x(t_0) + \bar{x}(t_0), x(t_0), x(T) + \bar{x}(T), x(T)).$$

Так как $\psi(t)$ является решением интегрального уравнения (11), то из (15) получаем:

$$J(u+\overline{u})-J(u)=\int_{t_0}^{T}<\nabla_u H(t,x(t),u(t),\psi(t)),\overline{u}(t)>dt+\eta .$$

Учитывая условия 1)-4), и в силу лемм 1, 2, имеем: $|\eta|\le const\cdot\|\overline{u}\|_{L_2^r}^2$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия 1)-5), и

$$S=\left(K_5-K_4\rho^2-M_3S_1\rho^2-M_4S_1-N_3\rho^2-N_4\rho^2\right)>0 .$$

Тогда в оптимальной задаче (2)-(5) существует оптимальное управление.

**Доказательство.** Согласно теореме 2 имеет место:

$$J(u+\overline{u})-J(u)=\langle\nabla J(u),\overline{u}\rangle_{L_2^r}+\eta$$

для всех $u, u+\overline{u}\in U$, где

$$\eta=\int_{t_0}^{T}E_F(t,x(t)+\overline{x}(t),x(t),u(t)+\overline{u}(t),u(t))dt+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\langle\psi(t),E_f(t,x(t)+\overline{x}(t),u(t)+\overline{u}(t),u(t))\rangle dt+$$

$$+E_\Phi(x(t_0)+\overline{x}(t_0),x(t_0),x(T)+\overline{x}(T),x(T)).$$

Оценим выражение $\eta$ снизу. Для этого будем использовать условия 2)-5). Учитывая условие 5) получаем:

$$\eta\ge K_5\|\overline{u}\|_{L_2^r}-K_6\|\overline{x}\|_{C^n}^2-\|\psi(t)\|_{C^n}\|E_f(t,x(t)+\overline{x}(t),u(t)+\overline{u}(t),u(t))\|_L-$$

$$-\|E_\Phi(x(t_0)+\overline{x}(t_0),x(t_0),x(T)+\overline{x}(T),x(T))\|,$$

а используя условие 4) и лемму 2, получаем:

$$\eta\ge K_5\|\overline{u}\|^2-K_6\|\overline{x}\|_{C^n}^2-S_1\left(M_3\|\overline{x}\|_{C^n}^2-M_4\|\overline{u}\|_{L_2^r}\right)-N_3\|\overline{x}(t_0)\|_{E^n}^2-N_4\|\overline{x}\|_{E^n}^2 .$$

Учитывая лемму 1, имеем:

$$\eta\ge\left(K_5-K_4\rho^2-M_3S_1\rho^2-M_4S_1-N_3\rho^2-N_4\rho^2\right)\|\overline{u}\|_{L_2^r}^2=S\|\overline{u}\|_{L_2^r}^2 .$$

Тогда для приращения функционала верно неравенство

$$J(u+\overline{u})-J(u)\ge\langle\nabla J(u),\overline{u}\rangle_{L_2^r}+S\|\overline{u}\|_{L_2^r}^2 ,$$

которое означает, что функционал (2) при ограничениях (3)-(5) сильно выпуклый. Тогда, по теореме 8 из [2] (стр.55), следует существование оптимального управления в задаче (2)-(5). Теорема доказана.

**Замечание.** Отметим, что когда $A$-единичная матрица, а $B$-нулевая матрица, то получается задача Коши и соответствующая теорема существования оптимального управления доказана в [4].


**ЛИТЕРАТУРА**

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.:, Наука, 1980.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
4. Поляк Б.Т. К теории нелинейных задач оптимального управления. Вестник Московского Университета, 1968, №2, стр.30-40.


## AYRILMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ SİSTEMLƏR ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏEDİCİNİN VARLIĞI


**R.Ə.SƏRDAROVA, Y.Ə.ŞƏRİFOV**



**XÜLASƏ**

İşdə adi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan ayrılmayan sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Funksionalın qradiyenti aşkar şəkildə tapılmışdır. Optimal idarəedicinin varlığı üçün teorem isbat edilmişdir.


## EXISTENCE OF THE OPTIMAL CONTROL FOR SYSTEMS WITH NON-SEPARATED BOUNDARY CONDITIONS


**R.A.SARDAROVA, Ya.A.SHARIFOV**



**SUMMARY**

In the work an optimal control problem with non-separated boundary conditions described by ordinary differential equations is considered. The formula of the cost functional gradient in an explicit form was found. The existence theorem of optimal control was proved.